2.7.25 Použití substituce při řešení soustav rovnic

Předpoklady: 020724

Pedagogická poznámka: Hodinu je možné pojmout dvěma způsoby:
Pokud budete řešit i slovní úlohy, je potřeba ještě polovina další vyučovací hodiny (zbytek pak můžete věnovat písemce).
Pokud slovní úlohy vynecháte, 45 minut bude stačit.

Pedagogická poznámka: Stejně jako ve všech ostatních příkladech s použitím substituce je třeba dát pozor, aby studenti nahradili všechny výskyty proměnné a pouze tehdy, pokud jde opravdu o stejné výrazy.

Př. 1: Mistr s učněm opravují auto. Kdyby pracovali společně 5 hodin, učedník by práci dodělal za 1hodinu. Kdyby pracovali společně 2 hodiny a pak mistr ještě 3 hodiny sám, zbývala by ještě 1/3 práce. Jak dlouho by auto opravoval každý sám?

mistr x hodin celá oprava $\Rightarrow$ za jednu hodinu $\frac{1}{x}$

učeň y hodin celá oprava $\Rightarrow$ za jednu hodinu $\frac{1}{y}$

sestavíme rovnice:

společně 5 hodin, učedník by práci dodělal za 1hodinu $\Rightarrow$ $5\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{1}{y}=1$

společně 2 hodiny a pak mistr ještě 3 hodiny sám, zbývala by ještě 1/3 práce:

$\Rightarrow 2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{3}{x}=1-\frac{1}{3}$

Získáváme soustavu:

$$5\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{1}{y}=1$$

$$2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{3}{x}=1-\frac{1}{3}$$

Nevýhoda – obě neznámé ve jmenovateli $\Rightarrow$

Substituce: $\frac{1}{x}=a$, $\frac{1}{y}=b$ $\Rightarrow$ Řešíme soustavu:

$$5(a+b)+b=1$$

$$2(a+b)+3a=1-\frac{1}{3}$$. upravíme:

$$5a+6b=1$$

$$5a+2b=\frac{2}{3}$$

$$5a+6b=1$$

$$[\![1]\!]-[\![2]\!] \qquad 4b=\frac{1}{3}$$

Dopočteme b: $4b=\frac{1}{3} \Rightarrow b=\frac{1}{12}$

získáme a z první rovnice:

$$5a+6\cdot\frac{1}{12}=1$$

$$5a=\frac{1}{2} \Rightarrow a=\frac{1}{10}$$

Návrat k původní proměnné:

$$\frac{1}{x}=a=\frac{1}{10} \qquad \frac{1}{x}=\frac{1}{10} \Rightarrow x=10$$

$$\frac{1}{y}=b=\frac{1}{12} \qquad \frac{1}{y}=\frac{1}{12} \Rightarrow y=12$$

$$K=\{[10;12]\}$$

Mistr by provedl opravu za 10 hodin, učedník za 12.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad považuji za jeden ze svých největších pedagogických úspěchů. Ve třídě 4B2011 se přesto, že od poslední úlohy na společnou práci uplynulo přes dva měsíce a třída předvedla krátký výstup naprosté beznaděje a bezmoci, podařilo samostatně vyřešit úkol prakticky všem. Ono je snad možné naučit studenty řešit i slovní úlohy.

Př. 2: Káťa K. s Vojtou H. ze 4B2009 mažou za trest tabule na celé škole. Když budou mazat společně 25 minut, domaže Káťa zbytek za 5 minut. Když bude Vojta mazat 28 minut sám, dodělají trest společně za 12 minut. Za jak dlouho by všechny tabule smazal každý z nich sám?

Káťa x minut celý trest $\Rightarrow$ za jednu minutu $\frac{1}{x}$

Vojta y minut celý trest $\Rightarrow$ za jednu minutu $\frac{1}{y}$

vytvoření rovnic:

společně 25 minut, domaže Káťa zbytek za 5minut: $25\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{5}{x}=1$

Vojta mazat 28 minut a dodělají trest společně za 12 minut: $12\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{28}{y}=1$

Substituce: $\frac{1}{x}=a$, $\frac{1}{y}=b \Rightarrow$ Řešíme soustavu:

$$25(a+b)+5a=1$$

$$12(a+b)+28b=1$$

$$30a+25b=1$$

$$12a+40b=1$$

z 2. rovnice si vyjádříme a a dosadíme do první:

$$12a+40b=1 \Rightarrow a=\frac{1-40b}{12}$$

$$30\frac{1-40b}{12}+25b=1$$

$$15-600b+150b=6$$

$$450b=9$$

$$b=\frac{1}{50}$$

$$a=\frac{1-40\frac{1}{50}}{12}=\frac{\frac{1}{5}}{12}=\frac{1}{60}$$

Návrat k původní proměnné:

$$\frac{1}{x}=a=\frac{1}{60} \qquad \frac{1}{x}=\frac{1}{60} \Rightarrow x=60$$

$$\frac{1}{y}=b=\frac{1}{50} \qquad \frac{1}{y}=\frac{1}{50} \Rightarrow y=50$$

$$K=\{[60;50]\}$$

Káťa by sama smazala všechny tabule za 60 minut, Vojta by to stihnul za 50 minut.

Př. 3: Vyřeš soustavu rovnic $\begin{matrix} x^2+y^2=61 \\ x^2-y^2=11 \end{matrix}$.

Soustavu bychom mohli řešit klasicky – odečtením rovnic a dosazováním. Přítomnost druhých mocnin však situaci komplikuje.

Substituce: soustava obsahuje pouze x^2 a y^2, substitucí se zbavíme druhých mocnin:

$x^2=a$, $y^2=b$ $\Rightarrow$ Řešíme soustavu:

$$a+b=61$$

$$a-b=11$$

$$a+b=61$$

$$[\![1]\!]+[\![2]\!] \qquad 2a=72$$

$$a=36$$

Dopočteme b: $a+b=61 \Rightarrow 36+b=61$

$$b=25$$

Návrat k původní proměnné:

$$x^2=a=36 \qquad x^2-36=0$$

$$(x-6)(x+6)=0$$

$$x_1=6 \qquad x_2=-6$$

$$y^2=b=25 \qquad y^2-25=0$$

$$(y-5)(x+5)=0$$

$$y_1=5 \qquad y_2=-5$$

Zbývá sestavit dvojice, obě hodnoty x i y jsme získali z jedné dvojice a, b $\Rightarrow$ mohu kombinovat všechna x se všemi y

$K=\{[-6;-5];[-6;5];[6;-5];[6;5]\}$

Pedagogická poznámka: Kromě toho, že někteří studenti řeší na konci kvadratické rovnice $x^2=36 \Rightarrow x=6$, bývá občas problém s tím, aby studenti sestavili všechny dvojice do řešení.

Př. 4: Vyřeš soustavu rovnic
$$x^2+y^2=13$$
$$x^2+2y=10$$

Substituce: soustava obsahuje pouze x^2, ale y se vyskytuje v první i druhé mocnině, substitucí se zbavíme pouze druhé mocniny x: $x^2=a \Rightarrow$ Řešíme soustavu:

$a+y^2=13$

$a+2y=10$

z druhé rovnice si vyjádříme a a dosadíme do první rovnice:

$a+2y=10 \Rightarrow a=10-2y$

$(10-2y)+y^2=13$

$y^2-2y-3=0$

$(y+1)(y-3)=0$

$y_1=-1 \Rightarrow a_1=10-2y=10-2\cdot(-1)=12$

$y_2=3 \Rightarrow a_2=10-2y=10-2\cdot3=4$

Návrat k původní proměnné:

z dvojice $a_1=12$, $y_1=-1$

$x^2=a=12$

$x^2-12=0$

$\left(x-\sqrt{12}\right)\left(x+\sqrt{12}\right)=0$

$x_1=\sqrt{12}$ $\quad$ $x_2=-\sqrt{12}$

Tedy dvojice řešení $\left[\sqrt{12};-1\right]$ a $\left[-\sqrt{12};-1\right]$

z dvojice $a_2=4$, $y_2=3$

$x^2=a=4$

$x^2-4=0$

$(x-2)(x+2)=0$

$x_1=2$ $\quad$ $x_2=-2$

Tedy dvojice řešení $[2;3]$ a $[-2;3]$

Dvojice x a y už jsou sestaveny, nemůžeme vytvořit dvojici $\left[\sqrt{12};3\right]$, protože $\sqrt{12}$ jsme získali k jiné hodnotě y.

$K=\left\{\left[\sqrt{12};-1\right];\left[-\sqrt{12};-1\right];[2;3];[-2;3]\right\}$

Pedagogická poznámka: Někteří studenti jsou trochu nesví z toho, že substituují pouze jednu proměnnou a druhá zůstává nezměněná.

Př. 5: Vyřeš soustavu rovnic
$$\frac{3x}{x-1}+2\frac{y}{y+1}=7$$
$$\frac{4x}{x-1}-\frac{y}{y+1}=2$$

Podmínky: $x\neq1$, $y=-1$

Substituce: $\frac{x}{x-1}=a$, $\frac{y}{y+1}=b \Rightarrow$ Řešíme soustavu:

$3a+2b=7$

$\underline{4a-b=2}$

z druhé rovnice si vyjádříme b a dosadíme do první rovnice: $4a-b=2 \Rightarrow b=4a-2$

$3a+2(4a-2)=7$

$3a+8a-4=7$

$11a=11$

$a=1$

$b=4a-2=4\cdot1-2=2$

Návrat k původní proměnné:

$\frac{x}{x-1}=a=1$

$\frac{x}{x-1}=1 \quad /\cdot(x-1)$

$x=x-1$

$0=-1$ - nemůžeme najít žádné $x \Rightarrow$ soustava nemá řešení, nemá cenu dopočítávat y

$K=\emptyset$

Pedagogická poznámka: V předchozím i následujícím příkladě je důležité, aby studenti pochopili, že hledají uspořádanou dvojici čísel a jakmile je jasné, že jedno z nich není možné najít, je další řešení zbytečné.
Poměrně malé procento studentů má problémy se substituováním levého zlomku kvůli rozdílným číslům v čitatelích.

Př. 6: Vyřeš soustavu rovnic

$$\frac{2(x-1)}{y+1}-\frac{3(y+2)}{x-1}=3$$
$$\frac{x-1}{y+1}+\frac{2(y+2)}{x-1}=-2$$

Podmínky: $x\neq1$, $y\neq-1$

Substituce: můžeme klidně substituovat i výraz, který obsahuje dvě proměnné : $\frac{x-1}{y+1}=a$, $\frac{y+2}{x-1}=b \Rightarrow$ Řešíme soustavu:

$2a-3b=3$

$\underline{a+2b=-2}$

$$2a-3b=3$$
$$[\![1]\!]-2\cdot[\![2]\!] \qquad -7b=7$$

$b=-1$

$2a-3b=3 \Rightarrow 2a-3\cdot(-1)=3$

$a=0$

Návrat k původní proměnné:

$$\frac{x-1}{y+1}=a=0$$
$$\frac{y+2}{x-1}=b=-1$$
Opět získáváme soustavu rovnic:
$$\frac{x-1}{y+1}=0$$
$$\frac{y+2}{x-1}=-1$$
Rovnice upravíme:
$$\frac{x-1}{y+1}=0 \qquad /\cdot(y+1)$$
$$\frac{y+2}{x-1}=-1 \quad /\cdot(x-1)$$
$$x-1=0$$
$$y+2=1-x$$
Z první rovnice vyjádříme *x*: $x=1$, dosadíme do druhé:
$$y+2=1-1$$
$$y=-2$$
Zdá se, že řešením je dvojice čísel $[1;-2]$, ale tato dvojice nevyhovuje podmínce: $x \neq 1$.
$$K=\emptyset$$

Pedagogická poznámka: Někteří studenti se potřebují ujistit, že je možné substituovat výraz, ve kterém se vyskytují dvě neznámé. Další rozpaky se objevují, když při návratu k původním proměnným vznikne opět soustava rovnic.

Př. 7: Petáková:
strana 17/cvičení 34 c) d)
strana 17/cvičení 35 b)
strana 17/cvičení 36 a) b)
strana 17/cvičení 37 b) c) d)

Shrnutí: Substituci můžeme používat i při řešení soustav rovnic k nahrazení jedné nebo více neznámých.